Mouvement brownien dans le cadre de la théorie de la relativité

Jürgen Angst

Institut de Recherche Mathématique Avancée
Université Louis Pasteur, Strasbourg

Séminaire de Mathématique Physique
Genève, le 27 avril 2009

Motivations mathématiques et physiques

Motivations mathématiques

Il existe des liens profonds entre les propriétés locales et asymptotiques d'un mouvement brownien sur une variété riemannienne et la géométrie de cette variété.

Existe-t-il de tels liens dans le cadre lorentzien ?

- Qu'est-ce qu'un mouvement brownien sur une variété lorentzienne ?
- Son étude nous apprend-elle quelque chose sur la géométrie de la variété sous-jacente ?

Motivations physiques

Deux modèles usuels très simples pour décrire le mouvement brownien physique dans l'espace euclidien, $\mathbf{x}_t = x_t^i$ modèlise la position d'une particule, $\mathbf{v}_t = v_t^i$ sa vitesse :

$$\left\{ \begin{array}{l} dx_t^i = v_t^i \, dt \\ dv_t^i = \sigma \, dW_t^i \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} dx_t^i = v_t^i \, dt \\ dv_t^i = -v_t^i \, dt + \sigma \, dW_t^i. \end{array} \right.$$

Ces modèles ne sont pas compatibles avec la théorie de la relativité puisque dans les deux cas :

la vitesse $\mathbf{v}_t$ n'est pas bornée !

Le cadre géométrique de la théorie de la relativité

Espace-temps de Minkowski et espace hyperbolique

On désigne par $\mathbb{R}^{1,d} := \{\xi = (\xi^0, \xi^i) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d\}$ l'espace-temps de Minkowski de la relativité restreinte, muni de la pseudo-métrique :

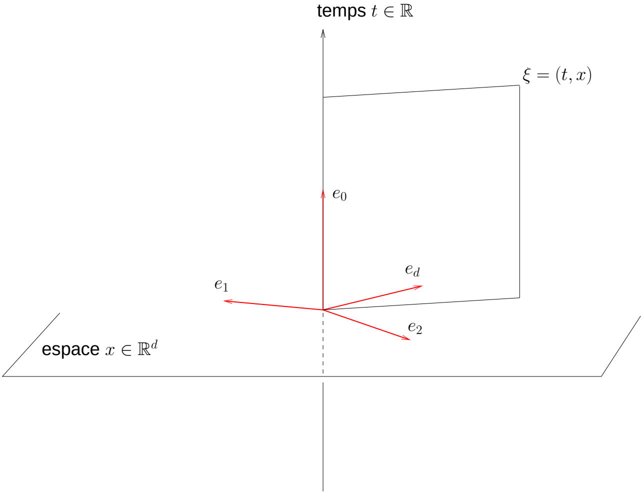
$$q(\xi) = \langle \xi, \xi \rangle := -|\xi^0|^2 + \sum_{i=1}^{d} |\xi^i|^2,$$

et

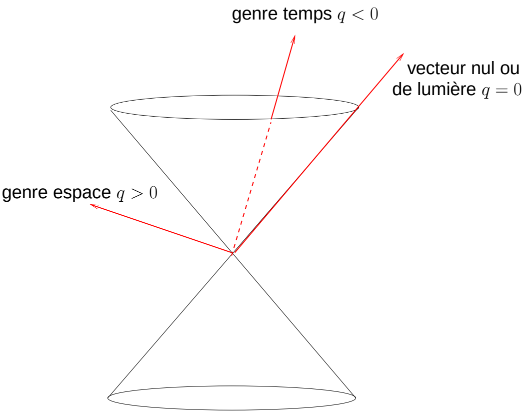
$$\mathbb{H}^d := \{\xi \in \mathbb{R}^{1,d} \,|\, \xi^0 > 0 \text{ et } \langle \xi, \xi \rangle = -1\}.$$

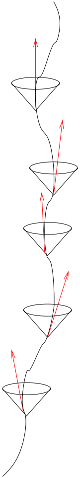
Si $(e_0, e_1, \ldots, e_d)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^{1,d}$ et (e_j^*) sa base duale, les matrices $E_j = e_0 \otimes e_j^* + e_j \otimes e_0^*$ engendrent les rotations hyperboliques.

L'espace-temps de Minkowski



Le cône de lumière





Paramétrisation par le temps propre

Une trajectoire de genre temps $(\xi_u, \dot{\xi}_u)_{u \geq 0}$, $i.e.$ telle que $q(\dot{\xi}_u) < 0$ peut toujours être reparamétrée par la longueur d'arc ou temps propre s de sorte que $q(\dot{\xi}_s) = -1$.

Auquel cas, la trajectoire $(\xi_s, \dot{\xi}_s)_{s \geq 0}$ est à valeurs dans le fibré tangent unitaire (espace des phases) $\mathbb{R}^{1,d} \times \mathbb{H}^d$.

Le cadre de la théorie de la relativité générale

Dans la théorie de la relativité générale, l'espace $\mathbb{R}^{1,d}$ est remplacé par une variété lorentzienne $\mathcal{M}$ de dimension $d+1$.

En chaque point de ξ de $\mathcal{M}$, l'espace tangent $T_\xi\mathcal{M}$ est muni d'une pseudo-métrique $g = g(\xi)$ de signature $(-1, 1, \ldots, 1)$.

Comme dans $\mathbb{R}^{1,d}$, les vecteurs (et les courbes) dans $T\mathcal{M}$ sont discriminés selon le signe de leur norme. Une courbe de genre temps $(\xi_u, \dot{\xi}_u)_{u\geq 0} \in T\mathcal{M}$ peut toujours être paramétrée par le temps propre s, auquel cas $(\xi_s, \dot{\xi}_s)_{s\geq 0}$ vit dans le fibré tangent unitaire $T^1\mathcal{M}$.

Le mouvement brownien dans l'espace de Minkowski

La diffusion relativiste de Dudley

Soit $\dot{\xi}_s$ un mouvement brownien hyperbolique dans $\mathbb{H}^d$ et

$$\xi_s := \xi_0 + \int_0^s \dot{\xi}_u du.$$

Alors $(\xi_s, \dot{\xi}_s)$ est une diffusion à valeurs dans $\mathbb{R}^{1,d} \times \mathbb{H}^d$.

Sa loi est invariante sous l'action du groupe de Lorentz.

La diffusion relativiste de Dudley

Si $\xi_s = (\xi_s^0, \overrightarrow{\xi_s})$ et $s(t)$ est défini de sorte que $\xi_{s(t)}^0 = t$, alors la trajectoire euclidienne

$$Z_t := \overrightarrow{\xi_{s(t)}}$$

vérifie

$$\left| \frac{dZ(t)}{dt} \right| < 1.$$

La vélocité de $Z(t)$ est donc de norme strictement inférieure à 1 (qui est ici la vitesse de la lumière).

Le théorème de classification de Dudley

Théorème (Processus markoviens dans $\mathbb{R}^{1,d} \times \mathbb{H}^d$, dont la loi est invariante sous l'action des isométries affines)

Ce sont les processus $(\xi_s, \dot{\xi}_s) \in \mathbb{R}^{1,d} \times \mathbb{H}^d$ *tels que :*

• $(\dot{\xi}_s)_{s \geq 0}$ *est un processus de markov dans* $\mathbb{H}^d$ *dont la loi est invariante sous l'action des isométries de* $\mathbb{H}^d$ *;*

• $\xi_s = \xi_0 + \int_0^s \dot{\xi}_u du.$

Le processus $\dot{\xi}_s$ *peut être :*

• *continu :* $\dot{\xi}_s$ *est alors un mouvement brownien dans* $\mathbb{H}^d$ *;*

• *un processus de saut :* $\dot{\xi}_s$ *processus de Poisson dans* $\mathbb{H}^d$ *;*

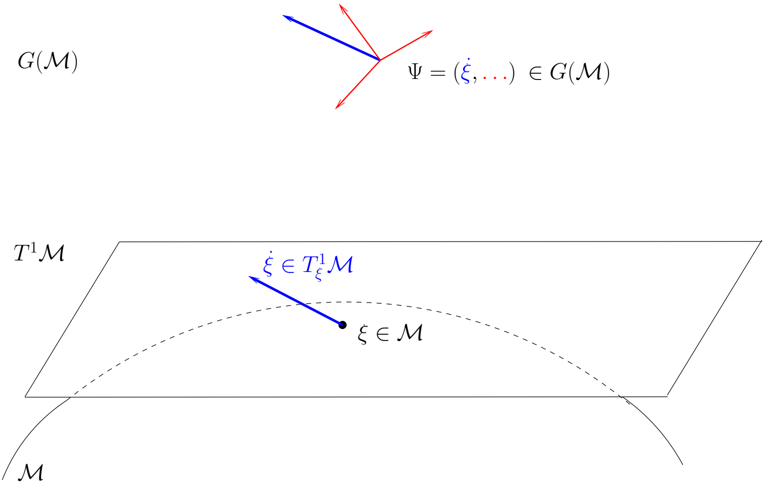
• *une superposition de trajectoires continues et de sauts.*

Mouvement brownien sur une variété lorentzienne générale

Le contexte géométrique

$$\begin{array}{cl} G(\mathcal{M}) & \text{le fibré des repères pseudo-orthonormés dont le premier élément vit dans } T^1\mathcal{M} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \pi_1} & \\ T^1\mathcal{M} & \text{la partie positive du fibré tangent unitaire} \\ \Big\downarrow & \\ \mathcal{M} & \text{une variété lorentzienne orientée de dimension } d+1\text{, munie de sa connexion de Levi-Civita} \end{array}$$

Le contexte géométrique



Le générateur infinitésimal de la diffusion

Soient V_j les champs de vecteurs verticaux canoniquement associés aux matrices E_j et H_0 le premier champ de vecteur horizontal.On définit

$$\mathcal{L} := H_0 + \frac{\sigma^2}{2}\mathcal{V}, \quad \text{où} \quad \mathcal{V} := \sum_{j=1}^{d} V_j^2.$$

Si $\mathcal{L}_0$ désigne le générateur infinitésimal du flot géodésique sur $T^1\mathcal{M}$ et $\Delta_\mathcal{V}$ le laplacien vertical, pour tout $F \in C^2(T^1\mathcal{M})$, on a sur $G(\mathcal{M})$:

$$(\mathcal{L}_0 F)\circ\pi_1 \;=\; H_0(F\circ\pi_1)\;, \quad (\Delta_\mathcal{V} F)\circ\pi_1 \;=\; \mathcal{V}(F\circ\pi_1)\;.$$

Sur le fibré tangent $T^1\mathcal{M}$, l'opérateur $\mathcal{L}$ induit donc l'opérateur :

$$\mathcal{G} := \mathcal{L}_0 + \frac{\sigma^2}{2}\Delta_\mathcal{V}.$$

Théorème (Franchi and Le Jan)

• *Le systéme d'équations différentielles stochastiques*

$$(*) \qquad d\Psi_s = H_0(\Psi_s)\,ds + \sigma \sum_{j=1}^{d} V_j(\Psi_s)\circ dw_s^j$$

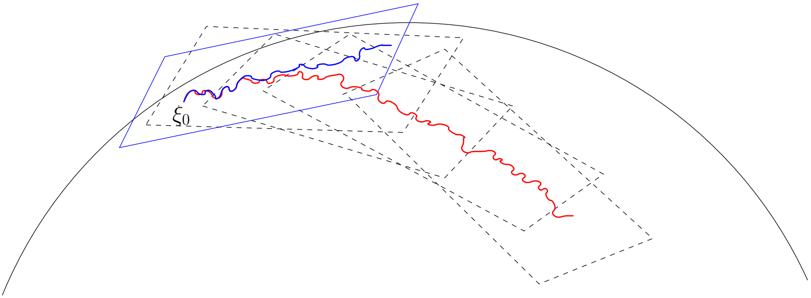
définit une diffusion $(\xi_s, \dot{\xi}_s) := \pi_1(\Psi_s)$ *sur* $T^1\mathcal{M}$*, dont le générateur infinitésimal est* $\mathcal{G} = \mathcal{L}_0 + \frac{\sigma^2}{2}\Delta_{\mathcal{V}}$.

• *Si* $\overleftarrow{\xi}(s) : T_{\xi_s}\mathcal{M} \to T_{\xi_0}\mathcal{M}$ *désigne le transport parallèle inverse le long des courbes* C^1 $(\xi_{s'}\,|\,0 \le s' \le s)$*, alors* $\zeta_s := \overleftarrow{\xi}(s)\,\dot{\xi}_s$ *est un mouvement brownien hyperbolique dans* $T_{\xi_0}\mathcal{M}$.

Anti-développement stochastique

MB dans $T^1_{\xi_0}\mathcal{M} \approx \mathbb{H}^d$

diffusion de Franchi et Le Jan



Autres exemples de diffusions minkowskiennes

Généralisations du processus d'Orstein-Uhlenbeck

Dans la littérature physique ont été introduites des tentatives de généralisation du processus d'Orstein-Uhlenbeck euclidien au cadre minkowskien :

$$\begin{cases} dx_t^i = v_t^i \, dt \\ \\ dv_t^i = -v_t^i \, dt + \sigma \, dW_t^i \end{cases} \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq d.$$

Ce sont des trajectoires du type

$$(x_t)_{t \geq 0} = (t, \, \mathbf{x}_t, \, p_t^0, \, \mathbf{p}_t)_{t \geq 0}.$$

Elles sont entièrement caractérisées par les composantes "euclidiennes" $(\mathbf{x}_t, \mathbf{p}_t)$.

Les deux principaux exemples

Le “Processus d’Orstein-Uhlenbeck Relativiste" (ROUP) :

$$\begin{cases} dx_t^i = \dfrac{p_t^i}{\sqrt{1+|p_t|^2}}\, dt \\ dp_t^i = -\dfrac{p_t^i}{\sqrt{1+|p_t|^2}}\, dt + \sigma\, dW_t^i . \end{cases}$$

La diffusion de Dunkel et Hänggi :

$$\begin{cases} dx_t^i = \dfrac{p_t^i}{\sqrt{1+|p_t|^2}}\, dt \\ dp_t^i = -\, p_t^i\, dt + \dfrac{\sigma}{(1+|p_t|^2)^{1/4}} \left[dW_t^i + p_t^i dw_t \right] . \end{cases}$$

Quelques questions et quelques réponses

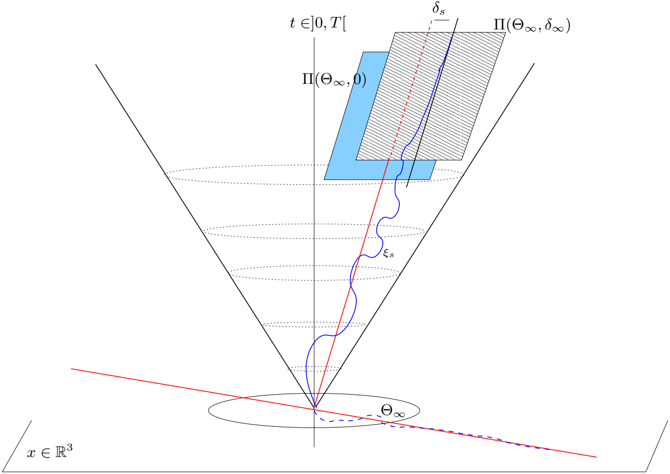
Des questions naturelles :

- Quel est le comportement asymptotique en temps long du mouvement brownien sur une variété lorentzienne ?
- En quoi reflète-t-il la géométrie de la variété sous-jacente ?
- Peut-on déterminer la frontière de Poisson du mouvement brownien ?

Les motivations

- Mieux comprendre les interactions entre probabilités et géométrie.
- Nouvelle compactification des variétés lorentziennes.
- Apporter des réponses à certaines conjectures de la littérature physique.

Asymptotique du mouvement brownien dans l'espace de Minkowski


δ_s
$t \in]0, T[$
$\Pi(\Theta_\infty, \delta_\infty)$
$\Pi(\Theta_\infty, 0)$
ξ_s
Θ_∞
$x \in \mathbb{R}^3$

Théorème (Bailleul 08)

Soit $(\xi_s, \dot{\xi}_s)$ *la diffusion de Dudley à valeurs dans* $\mathbb{R}^{1,d} \times \mathbb{H}^d$, *issue d'un point* $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$. *Il existe un angle* $\Theta_\infty \in \mathbb{S}^2$ *et un plan* $\Pi(\Theta_\infty, \delta_\infty)$ *aléatoires tels que, lorsque* s *tend vers l'infini, le processus* ξ_s *tend presque sûrement vers l'infini dans la direction* Θ_∞ *le long de* $\Pi(\Theta_\infty, \delta_\infty)$.

Théorème (Bailleul 08)

La tribu invariante pour le processus $(\xi_s, \dot{\xi}_s)$, *incluse dans la tribu asymptotique*

$$\bigcap_{t \geq 0} \sigma\left((\xi_s, \dot{\xi}_s),\ s > t \right),$$

coïncide avec la tribu $\sigma(\Theta_\infty, \delta_\infty)$ *engendrée par les variables aléatoires* $\Theta_\infty \in \mathbb{S}^2$ *et* $\delta_\infty \in \mathbb{R}^+$.

Mouvement brownien dans les espaces de Robertson-Walker

Les espaces de Robertson-Walker

Ce sont des variétés du type $\mathcal{M} = I \times M$, où $I =]0, T[$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ et M est une variété riemannienne homogène et isotrope, *i.e.* $M = \mathbb{S}^3, \mathbb{R}^3,$ ou $\mathbb{H}^3$. Elles sont munies de pseudo-métriques de la forme :

$$ds^2 = dt^2 - \alpha^2(t) d\ell^2.$$

où $d\ell^2$ est la métrique riemannienne usuelle sur M.

Ces variétés sont fréquemment utilisées en cosmologie comme modèles dans la théorie du Big-Bang.

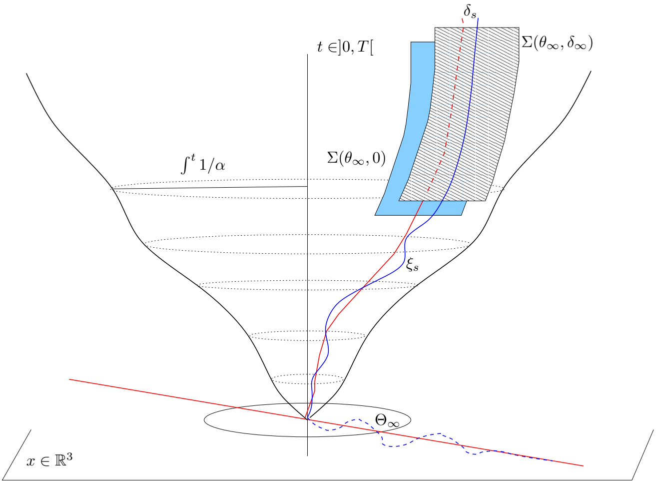
Géométrie des espaces de Robertson-Walker

La géométrie des espaces de Robertson-Walker diffère radicalement selon que l'inverse du facteur d'expansion α est intégrable ou non :

$$\int_{\cdot}^{T} \frac{du}{\alpha(u)} < +\infty \quad \text{ou} \quad \int_{\cdot}^{T} \frac{du}{\alpha(u)} = +\infty.$$

Il en est de même pour le comportement asymptotique du mouvement brownien dans ces espaces.

Lorsque $\displaystyle\int_{.}^{T} \frac{du}{\alpha(u)} = +\infty$


δ_s
$\Sigma(\theta_\infty, \delta_\infty)$
$t \in]0, T[$
$\int^t 1/\alpha$
$\Sigma(\theta_\infty, 0)$
ξ_s
Θ_∞
$x \in \mathbb{R}^3$

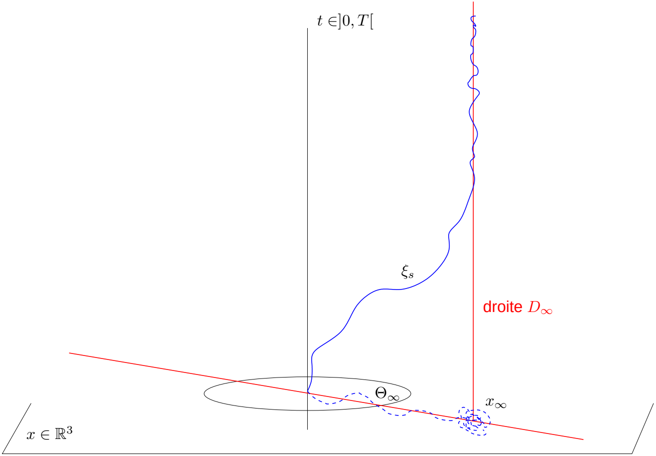
Théorème

Soit $(\xi_s, \dot{\xi}_s)$ un mouvement brownien à valeurs dans un espace de Robertson-Walker $\mathcal{M} = I \times_\alpha \mathbb{R}^3$, issu d'un point $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$. On suppose que

$$\int_{\cdot}^{T} \frac{du}{\alpha(u)} = +\infty.$$

Alors, il existe un angle $\Theta_\infty \in \mathbb{S}^2$ et une hypersurface $\Sigma(\Theta_\infty, \delta_\infty)$ aléatoires tels que, lorsque s tend vers l'infini, le processus ξ_s tend presque sûrement vers l'infini dans la direction Θ_∞ le long de $\Sigma(\Theta_\infty, \delta_\infty)$.

Lorsque $\displaystyle\int_{.}^{T} \frac{du}{\alpha(u)} < +\infty$


$t \in]0, T[$
ξ_s
droite D_∞
Θ_∞
x_∞
$x \in \mathbb{R}^3$

Théorème

Soit $(\xi_s, \dot{\xi}_s)$ *un mouvement brownien à valeurs dans un espace de Robertson-Walker* $\mathcal{M} = I \times_\alpha \mathbb{R}^3$*, issu d'un point* $(\xi_0, \dot{\xi}_0)$*. On suppose que*

$$\int_{\cdot}^{T} \frac{du}{\alpha(u)} < +\infty,$$

et que la fonction de Hubble $H = \alpha'/\alpha$ *n'est pas de cube intégrable. Alors, il existe une droite* D_∞ *aléatoire telle que, lorsque* s *tend vers l'infini, le processus* ξ_s *tend vers l'infini en s'enroulant autour de la droite* D_∞*.*

Théorème

La tribu invariante pour le processus $(\xi_s, \dot{\xi}_s)$, incluse dans la tribu asymptotique

$$\bigcap_{t \geq 0} \sigma \left((\xi_s, \dot{\xi}_s), \ s > t \right),$$

coïncide avec la tribu $\sigma(x_\infty)$ engendrée par la variable aléatoire $x_\infty \in \mathbb{R}^3$.

Mouvement brownien et géodésiques de lumière

Conjecture

Sur une variété lorentzienne, la comportement asymptotique du mouvement brownien (de la diffusion de Franchi et Le Jan) est semblable à celui d'une géodésique de lumière.

La frontière de Poisson du mouvement brownien sur une variété lorentzienne est composée de classes d'équivalence de géodésiques de lumière.

Éléments de bibliographie

R. M. Dudley.
Lorentz-invariant Markov processes in relativistic phase space.
Ark. Mat., 6 :241–268, 1966.

R. M. Dudley.
A note on Lorentz-invariant Markov processes.
Ark. Mat., 6 :575–581 (1967), 1967.

R. M. Dudley.
Asymptotics of some relativistic Markov processes.
Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 70 :3551–3555, 1973.

Jacques Franchi and Yves Le Jan.
Relativistic diffusions and Schwarzschild geometry.
Comm. Pure Appl. Math., 60(2) :187–251, 2007.

Jürgen Angst and Jacques Franchi.
Central limit theorem for a class of relativistic diffusions.
J. Math. Phys., 48(8) :083101, 20, 2007.

Ismael Bailleul.
Poisson boundary of a relativistic diffusion.
Probab. Theory Related Fields, 141(1-2) :283–329, 2008.

Jürgen Angst.
Étude de diffusions à valeurs dans des variétés lorentziennes.
Thèse de l'Université de Strasbourg, 2009.

Asymptotique de diffusions minkowskiennes

Propriétés du processus d'O-U euclidien

Soit $(\mathbf{x}_t, \ \mathbf{v}_t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ une solution du système d'éds :

$$\left\{ \begin{array}{l} dx_t^i = v_t^i \, dt \\ \\ dv_t^i = -v_t^i \, dt + \sigma \, dW_t^i \end{array} \right. \qquad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq d.$$

Alors, lorsque t tend vers l'infini, on a :

$$\mathbb{E}\left[\frac{|\mathbf{x}|^2(t)}{t} \right] \to d \times \sigma^2.$$

Propriétés du processus d'O-U euclidien

Soit $(\mathbf{x}_t,\ \mathbf{v}_t)_{t\geq 0}$ une solution du système d'éds, pour $1 \leq i \leq d$:

$$\begin{cases} dx_t^i = v_t^i\, dt \\ \\ dv_t^i = -v_t^i\, dt + \sigma\, dW_t^i \end{cases} \quad \text{avec} \quad (\mathbf{x}_0,\ \mathbf{v}_0) = (0,\ 0).$$

Alors lorsque t tend vers l'infini :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\, \mathbf{x}_{at} \right)_{a\geq 0} \xrightarrow{\mathcal{L}} \sigma \times (\mathcal{B}_a)_{a\geq 0},$$

où $\mathcal{B}$ est un mouvement brownien standard de dimension d.

Théorème (AF07)

Il existe une classe $\mathcal{C}$ de diffusions minkowskiennes du type

$$(x_t)_{t\geq 0} = (t,\ \mathbf{x}_t,\ p_t^0,\ \mathbf{p}_t)_{t\geq 0}.$$

telle que, pour chaque diffusion de cette classe, il existe une constante positive Σ_∞ telle que, lorsque t tend vers l'infini :

$$\left(t^{-1/2}\mathbf{x}_{at}\right)_{a\geq 0} \xrightarrow{\mathcal{L}} (\Sigma_\infty \times \mathcal{B}_a)_{a\geq 0}\,,$$

où $(\mathcal{B}_a)_{a\geq 0}$ est un MB standard de dimension d. En particulier, lorsque t tend vers l'infini, on a

$$\mathbb{E}\left[\frac{|\mathbf{x}|^2(t)}{t}\right] \to d \times \Sigma_\infty^2.$$